

PREZIDENTSKÉ VOĽBY

1. Očakávame, že väčšina žiakov bez veľkého rozmýšľania na základe výpočtu

$$\begin{aligned} 1 \% \dots\dots\dots & 42\,048,99 \\ 47,94 \% \dots\dots\dots & 47,94 \cdot 42\,048,99 = 2\,015\,828,5806 \cong 2\,015\,829 \end{aligned}$$

uvedie ako odpoveď **2 015 829** oprávnených voličov. Rovnaký výsledok dostanú aj tí žiaci, ktorí pri výpočte 47,94 % použijú namiesto hodnoty 42 048,99 zaokrúhlenú hodnotu 42 049.

Problém je v tom, že v uvedenom výpočte sa s hodnotou 47,94 ráta ako s presnou. V skutočnosti 47,94 vzniklo zaokrúhlením presnej hodnoty na 2 desatinné miesta.

Nasledujúce úlohy majú priviesť žiakov k tomu, aby si to uvedomili a prišli na to, nakoľko presnú informáciu o počte účastníkov volieb vieme z približnej hodnoty 47,94 % zistiť. Odporúčame riešenia úlohy 1 na hodine zatiaľ nerozoberať a pokračovať hneď riešením úlohy 2.

2. Vierin výsledok je správny.

Treba zistiť, koľko percent z 4 204 899 voličov je 2 015 624 voličov:

$$1 \% \text{ je } 4\,204\,899 \quad 2\,015\,624 : 4\,204\,899 = 47,935\,1347\dots, \quad \text{po zaokrúhlení } 47,94 \%$$

Po overení správnosti Vierinho výsledku treba dosiahnuť, aby si žiaci uvedomili, že niečo nie je v poriadku (Viera totiž uviedla riešenie, ktoré je správne, ale žiaci ho pravdepodobne nedostali ako výsledok riešenia úlohy 1 – ten je 2 015 829). Preto sa v úlohe 3 spoločne pozrieme so žiakmi na ich riešenie úlohy 1 a urobíme skúšku správnosti pre hodnotu 2 015 829.

3. Skúškou preveríme, že číslo 2 015 829 je tiež (približne) 47,94 % z celkového počtu oprávnených voličov:

$$1 \% \text{ je } 4\,204\,899 \quad 2\,015\,829 : 4\,204\,899 = 47,940\,0099\dots, \quad \text{po zaokrúhlení } 47,94 \%$$

Po tejto skúške správnosti by mala nasledovať diskusia. Ako je možné, že nám vyšiel iný počet voličov ako Viera? Urobili sme niekde chybu? Ak áno, tak kde a akú? Dôležité je, aby si žiaci všimli (prípadne ich na to môže upozorniť učiteľ), že výsledky skúšky v úlohách 2 a 3 nie sú presne 47,94 %. Keď si uvedomia, že obidve čísla (2 015 624 z úlohy 2 aj 2 015 829 z úloh 1 a 3) sú 47,94 % po zaokrúhlení na 2 desatinné miesta, môžeme pokračovať riešením úlohy 4. Túto úlohu odporúčame riešiť v malých skupinách.

4. Riešením úlohy 1 by mohli byť čísla **od 2 015 619 po 2 016 038**.

Daný počet percent 47,94 vznikol zaokrúhlením skutočného počtu percent na stotiny. Preto skutočný počet percent muselo byť niektoré číslo z intervalu $\langle 47,935; 47,945 \rangle$. Každý počet oprávnených voličov, pre ktorý príslušný počet percent padne do tohto intervalu, je riešením 4. úlohy. Pre krajné čísla dostaneme:

$$\begin{aligned} & \text{z celkového počtu } 4\,204\,899 \text{ voličov je} \\ 47,935 \%: & \quad 4\,204\,899 \cdot \frac{47,935}{100} = 2\,015\,618,33565\dots, \\ 47,945 \%: & \quad 4\,204\,899 \cdot \frac{47,945}{100} = 2\,016\,038,82555\dots \end{aligned}$$

Hľadané počty voličov sú celé čísla, preto riešením úlohy 4 sú všetky počty voličov od 2 015 619 po 2 016 038 (žiaci by si mali rozmyslieť, prečo sme menšie číslo zaokrúhľovali nahor a väčšie nadol). Ak teda počet percent poznáme s presnosťou na 2 desatinné miesta, vieme, že hľadaný počet voličov je niektoré číslo medzi 2 015 619 a 2 016 038, čo je celkom 420 možností.

Ak chceme tento počet možností znížiť, museli by sme počet percent poznať s väčšou presnosťou (teda zaokrúhlený na väčší počet desatinných miest). Otázkou je, nakoľko presne musíme poznať počet percent, aby sme vedeli určiť počet zúčastnených voličov jednoznačne (teda aby výsledkom namiesto predchádzajúcich 420 možností bola len jediná možnosť).



Poznámka: Podmieňovací spôsob mohli byť je tu na mieste. V skutočnosti existuje len jedno jediné riešenie úlohy, tým je skutočný počet voličov, ktorí sa zúčastnili prvého kola prezidentských volieb (prezradíme ho v zadaní úlohy 5). Ako vidno z riešenia našej série úloh, údaje uvedené v novinovom článku nám neumožňujú nájsť toto jediné riešenie. Vieme len zistiť, ktoré čísla by mohli byť týmto riešením, teda vieme nájsť riešenie s istou presnosťou (aká je táto presnosť, závisí od presnosti údajov uvedených v novinovom článku).

5. Vypočítaný počet percent treba zaokrúhliť aspoň na 5 desatinných miest.

Existuje niekoľko možných prístupov k riešeniu:

1. Predpokladáme, že žiaci začnú experimentovať a postupne zaokrúhľovať na stále väčší počet desatinných miest, až riešenie (zaokrúhlenie na 5 desatinných miest) nájdú.
2. Rýchlejšie sa k výsledku dopracujeme, ak zistíme, koľko percent z 4 204 899 predstavujú čísla 2 015 888,5 a 2 015 889,5 :

$$2\,015\,888,5 : 42\,048,99 = 47,941\,424\,990\,231\,632\,198\,537\,943$$

$$2\,015\,889,5 : 42\,048,99 = 47,941\,448\,772\,015\,689\,318\,578\,163$$

Vidíme, že čísla určujúce počet percent pre hodnoty 2 015 889, 2 015 888,5 a 2 015 889,5 sa líšia na piatom desatinnom mieste. Riešením je preto zaokrúhlenie na 5 desatinných miest, teda 47,941 44 % (pozor, táto myšlienka nie je až taká jednoduchá, treba o nej so žiakmi chvíľu diskutovať).

3. Ďalšou možnosťou je táto úvaha: Z čísla 4 204 899 je

1 %	42 048,99
0,1 %	4 204,899
0,01 %	420,489 9
0,001 %	42,048 99
0,0001 %	4,204 899
0,000 01 %	0,420 489 9

Odtiaľ vidno: ak v počte percent zväčšíme o 1 napr. číslicu na mieste tisícín, zväčší sa počet voličov o niekoľko desiatok. Pri riešení úlohy 5 potrebujeme zistiť, pre ktoré desatinné miesto táto zmena bude predstavovať menej ako 1 voliča. Ako vidno, táto situácia nastane prvýkrát pri 5. desatinnom mieste. Preto počet percent treba udávať zaokrúhlený na 5 desatinných miest.

Nasledujúce úlohy by mali preveriť, či a ako sa žiaci z riešenia úloh 1 – 5 poučili.

6. Existuje viacero možných postupov riešenia, podrobnejšie sa im budeme venovať v komentári k úlohe 7.

Odporúčame jednu z dvoch možností:

- *Nechaj úlohu 6 riešiť žiakov samostatne, ale riešenia – rovnako ako pri úlohe 1 – zatiaľ nekomentovať. Potom žiakov nechaj diskutovať o úlohe 7 najprv v menších skupinách, a potom pokračovať v diskusii s celou triedou.*
- *Nechaj úlohu 6 riešiť žiakov samostatne a na tabuľu napísať rôzne postupy, ktoré použili. Cieľom je získať všetky tri postupy uvedené v úlohe 7. Ak žiaci niektorý z týchto troch postupov neuvedú, uvedie ho učiteľ. Potom možno prejsť k diskusii o úlohe 7.*

7. **Správne riešenie majú Katarína a Juraj.**

Predovšetkým poznamenajme, že očakávame, že žiaci budú počet percent určovať s presnosťou na 2 desatinné miesta, keďže doteraz všetky údaje v citovanom novinovom článku boli s touto presnosťou. Diskusiou v triede by mali žiaci dospieť k týmto poznatkom:

- Katarínin a Jurajov postup sú obidva správne, líšia sa tým, že využívajú iné údaje z úryvku: Katarína využíva údaje o V. Mečiarovi, Juraj o počte všetkých platných hlasov. Rozdiel je v tom, že údaj o počte všetkých platných hlasov je presný, údaj o počte percent V. Mečiara len približný. Preto Juraj svojím postupom získa presný a Katarína len približný (teda v porovnaní s Jurajom menej presný) výsledok.



- Milan sa z prvých úloh nepoučil. Počítal totiž tak, akoby 32,74 % bol presný údaj. Ako sme videli v komentári k úlohe 1, výsledok získaný takýmto postupom je len približný, pričom nevieme odhadnúť, o koľko sa získané číslo odlišuje od skutočnej hodnoty. Pripomeňme, že Milanovým postupom dostaneme číslo 2 015 829, skutočný počet oprávnených voličov – ako vieme zo zadania úlohy 5 – je 2 015 889, teda o 60 väčší. Navyše Milan sa domnieva, že našiel presnú hodnotu, čo nie je pravda. Nie je teda vôbec isté, že Milanov výsledok udáva hľadaný počet percent s presnosťou na 2 desatinné miesta. Na tom nič nemení fakt, že Milan v tomto prípade zhodou okolností získal rovnaký výsledok ako Juraj.

Táto časť diskusie bude pravdepodobne najťažším orieškom. Aby sme žiakov presvedčili, že Milanov postup skutočne nemusí viesť k správnej odpovedi, skúsme s nimi zopakovať výpočty pre prípad, že I. Gašparovič by získal napr. 442 615 hlasov. (Toto číslo je jedno z riešení úlohy, ktorú môže učiteľ nechať riešiť aj žiakov: Aký počet hlasov by musel získať I. Gašparovič, aby Milanov výsledok bol 22,29 % a Jurajov 22,28 %? Ak označíme x hľadaný počet hlasov, musí platiť

$$32,74 \cdot \frac{x}{650\,242} \geq 22,285 > \frac{x}{19\,862,14},$$

riešením sú čísla od 442 598 do 442 627.) Vtedy Jurajov – zaručene správny – výsledok je

$$\frac{442\,615}{19\,862,14} = 22,284\,356 \dots \cong 22,28,$$

ale Milan svojím postupom dostane

$$32,74 \cdot \frac{442\,615}{650\,242} = 22,285\,879 \dots \cong 22,29.$$

Katarína v tomto prípade dostane riešenie I. Gašparovič získal 22,28 % alebo 22,29 %. Žiakov možno bude trápiť, prečo Katarínin postup vyhlasujeme za správny, a Milanov za nesprávny, ak Katarína tiež uvádza hodnotu 22,29. Rozdiel medzi Kataríniným a Milanovým postupom je v tom, že Katarína nájde interval hodnôt, v ktorom hľadané riešenie iste leží, zatiaľ čo Milan uvedie len jednu hodnotu, ktorá v niektorých prípadoch je a v iných nie je správnym riešením. Pritom Milanov postup neumožňuje zistiť, kedy nastala prvá a kedy druhá možnosť. Ak ho teda použijeme, nevieme, či riešenie, ktoré sme našli, je alebo nie je správne.